# Обобщенные лестничные операторы

gleb@tushavin.ru

## Введение

Алгебраический подход к описанию квантовых систем состоит в изучении представлений наблюдаемых и соотношений между ними. С группой симметрий гамильтониана системы обычно связана ее алгебра Ли, через образующие которой выражается сам гамильтониан.
В некоторых алгебрах, например $w(1)$ и $su(2)$, для построения канонического базиса представлений вводится пара сопряженных операторов, называемых лестничными. В случае алгебры $w(1)$ эти операторы называют операторами рождения/уничтожения, поскольку их действие описывает переходы между энергетическими уровнями квантового гармонического осциллятора.

## Алгебра *w*(1)

Динамической группой квантового гармонического осциллятора является группа Вейля W(1), алгебра которой порождается генераторами $a$ и $a^\dagger$ с коммутационным соотношением

$$[a,\quad a^\dagger]=1.$$

Данные операторы являются лестничными для оператора числа частиц $N=a^\dagger a$, что видно из коммутационных соотношений

$$[N,\quad a^\dagger]=a^\dagger,\quad [N,\quad a]=-a.$$

Если $|n\rangle$ - собственный вектор оператора $N$, тогда

$$a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\quad a|n+1\rangle=\sqrt{n+1}|n\rangle.$$

Оператор $a$ обладает нетривиальным ядром, так называемым вакуумным состоянием

$$a|0\rangle=0.$$

Оператор $N$ обладает эквидистантным спектром, состоящим из целых неотрицательных чисел.

## Алгебра *su*(2)

Структура алгебры $su(2)$ определяется коммутационными соотношениями ее генераторов

$$J_z=J_z^\dagger,\qquad J_+=J_-^\dagger,$$
$$[J_z,J_\pm]=\pm J_\pm,\quad [J_+,J_-]=2J_z.$$

Для алгебры $su(2)$ определен коммутирующий со всеми генераторами оператор Казимира

$$J^2=J_z^2+\tfrac{1}{2}\left(J_+J_-+J_-J_+\right),$$
$$[J^2,J_z]=[J^2,J_\pm]=0.$$

Действие операторов $J^2$ и $J_z$ на каноническом базисе определено

$$J^2|j,j_z\rangle=j(j+1)|j,j_z\rangle,\quad J_z|j,j_z\rangle=j_z|j,j_z\rangle,$$
$$J_+|j,j_z\rangle=\sqrt{(j+j_z+1)(j-j_z)}|j,j_z+1\rangle,$$
$$J_+|j,j_z=j\rangle=0,\quad J_-|j,j_z=-j\rangle=0.$$

Собственные числа оператора $J^2$ определяют размерность неприводимого представления.
Спектр оператора $J^2$ состоит из неотрицательных целых и полуцелых чисел. Внутри неприводимого представления, отвечающего числу $j$, оператор $J_z$ имеет (2j+1) различных собственных векторов, отвечающих числам $\{-j,-j+1,-j+2,\dots,j-1,j\}$.

## Отображение Жордана

Отображение Жордана-Швингера связывает матрицы размерности $n\times n$ с полевыми операторами многомодовой системы

$$X=(x_{ij})\mapsto L_X=\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}a_i^\dagger a_j,$$

при этом сохраняются коммутационные соотношения исходных матриц

$$L_{[X,Y]}=[L_X,L_Y].$$

Таким образом, для алгебр Ли отображение Жордана является гомоморфизмом.
Образом единичной матрицы является оператор общего числа частиц $N=\sum_{i=1}^{n}N_i.$

## Образ алгебры *su(2)*

Предметом исследования нашей работы стал образ отображения Жордана неприводимого представления алгебры $su(2)$. Генераторы выражаются через полевые операторы

$$J_z=\sum_{\mu=-s}^{s}\mu a_\mu^\dagger a_\mu,\quad N=\sum_{\mu=-s}^{s}a_\mu^\dagger a_\mu,$$
$$J_+=\sum_{\mu=-s}^{s}\sqrt{(s+\mu+1)(s-\mu)}\,a_{\mu+1}^\dagger a_\mu.$$

Однако, для случая $s>1$ спектр оператора $J^2$ оказывается вырожден настолько, что коммутирующий набор операторов $N,J^2,J_z$ оказывается неполным.
Для решения возникшей проблемы мы обобщили понятие лестничного оператора на случай неэквидистантного спектра, чтобы построить повышающие и понижающие операторы для оператора Казимира $J^2$.

## Лестничные операторы

Для оператора $H=H^\dagger$ будем называть оператор $p$ - правым лестничным (ПЛО), если существует такой нетривиальный оператор $P=P^\dagger$ коммутирующий с $[H,P]=0$, что выполняется следующее

$$[H,p]=pP\quad\text{или}\quad Hp=p(P+H).$$

При этом сопряженное выражение оказывается определением ЛЛО:

$$[H,p^\dagger]=-Pp^\dagger.$$

ПЛО является ПЛО для любого полинома $H$

$$[H^n,p]=p\left((H+P)^n-H^n\right).$$

Процедура нахождения ПЛО схожа с решением спектральной задачи. Пусть имеется набор операторов $\{T_\mu\}_{\mu=1}^{n}$, замкнутый относительно коммутирования с $H$

$$[H,T_\eta]=\sum_{\mu=1}^{n}T_\mu\alpha_{\mu\eta},$$

где операторы $\alpha_{\mu\eta}=\alpha_{\mu\eta}^\dagger$, $[H,\alpha_{\mu\eta}]=0.$
Тогда задачу нахождения ПЛО можно сформулировать следующим образом. Будем искать такие $\sigma_\eta=\sigma_\eta^\dagger$, что

$$\left[H,\sum_{\eta=1}^{n}T_\eta\sigma_\eta\right]=\sum_{\eta=1}^{n}T_\eta\sigma_\eta P,\quad [H,\sigma_\eta]=[\alpha_{\mu\nu},\sigma_\eta]=0.$$

Или

$$\sum_{\mu=1}^{n}T_\mu\Big(\sum_{\eta=1}^{n}\alpha_{\mu\eta}\sigma_\eta-\sigma_\mu P\Big)=0.$$

Данное уравнение можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix}T_1 & T_2 & \dots & T_n\end{pmatrix}(A-IP)\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\end{pmatrix}^T=0.$$

Чтобы существовал такой вектор $\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\end{pmatrix}^T$, должно выполняться

$$\det(A-IP)=0$$

Находя решения которого, мы получаем возможные $P$, для которых уже из исходного уравнения находятся соответствующие им $\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\end{pmatrix}_P^T$.
Замечание. Мы нашли не все решения матричного уравнения.

## Пример для s=1

Рассмотрим операторы

$$p_0^\dagger=2a_0^\dagger,\quad p_1^\dagger=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^\dagger J_-+a_{-1}^\dagger J_+\right).$$

Коммутационные соотношения с оператором Казимира

$$[J^2,p_0^\dagger]=2p_0^\dagger+4p_1^\dagger,\quad [J^2,p_1^\dagger]=p_0^\dagger J^2.$$

ПЛО оператора Казимира:

$$\tau_{-1}^\dagger=p_0^\dagger\hat{j}-2p_1^\dagger,\qquad [J^2,\tau_{-1}^\dagger]=\tau_{-1}^\dagger 2\hat{j},$$
$$\tau_1^\dagger=p_0^\dagger(\hat{j}+1)+2p_1^\dagger,\quad [J^2,\tau_1^\dagger]=\tau_1^\dagger 2(\hat{j}+1),$$
$$\hat{j}=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{I+4J^2}-I\right)\quad [\hat{j},\tau_{-1}^\dagger]=-\tau_{-1}^\dagger,\quad [\hat{j},\tau_1^\dagger]=\tau_1^\dagger.$$

Действие ПЛО на собственные векторы:

$$\tau_{-1}^\dagger|n,j+1,j_z\rangle\to|n+1,j,j_z\rangle,$$
$$\tau_1^\dagger|n,j,j_z\rangle\to|n+1,j+1,j_z\rangle.$$

Операторы $\tau_{-1}^\dagger,\tau_{-1}$ образуют деформацию алгебры $su(2)$.
Операторы $\tau_1^\dagger,\tau_1$ образуют деформацию алгебры $w(1)$.