



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

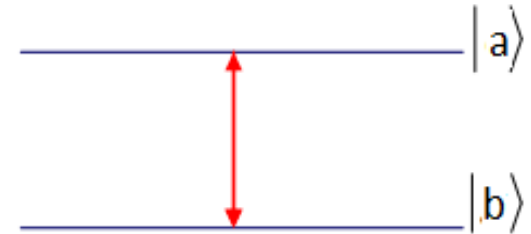
Математическое моделирование
стохастического процесса
взаимодействия простых физических
подсистем

Студент: Резцова А.М., R4196

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Попов Е.Н.

Постановка задачи

- Атом со сложной структурой энергетических уровней находится во внешнем электромагнитном поле с неклассическими свойствами.
- Требуется пронаблюдать за изменением состояния электронной оболочки атома с течением времени, описать установление стационарной динамики в условиях шума.



Сложность
структуры атома



Многоуровневый
атом

Неклассические
свойства ЭМ поля



Гармоническая
функция + шум

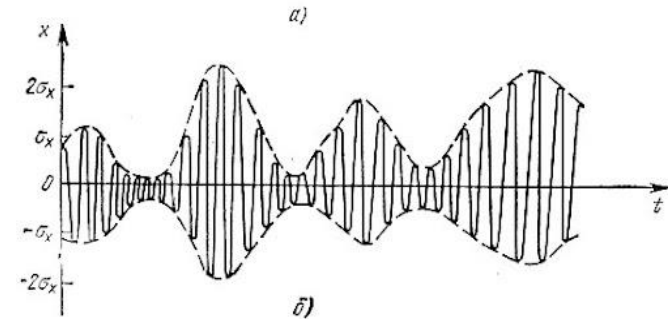
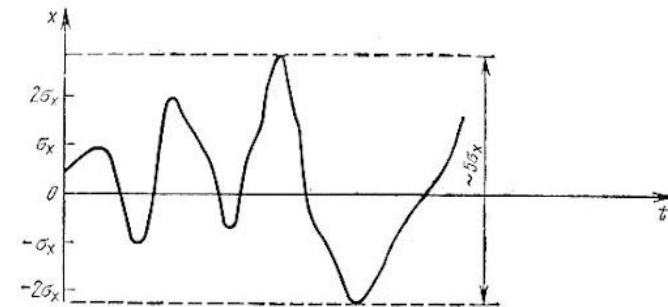
Постановка задачи

- Рассмотреть различные варианты шума как случайного процесса, протекающего в ЭМ поле.
- Провести численное моделирование процесса с целью поиска новых эффектов.
- Расширить задачу от двухуровневых атомов до многоуровневых, например, рассмотреть динамику атома Ru в заданном ЭМ поле.

Задача описания **атома во внешнем поле** хорошо изучена на данный момент (1. Аллен Л., Эберли Дж. **Оптический резонанс и двухуровневые атомы** 1978

2. Happer, W., "Optical Pumping" Rev. Mod. Phys., 1972)

Работ с **подробным** численным решением, где бы была найдена динамика электронной оболочки атома во **внешнем электромагнитном поле с заданным шумом** – мало.

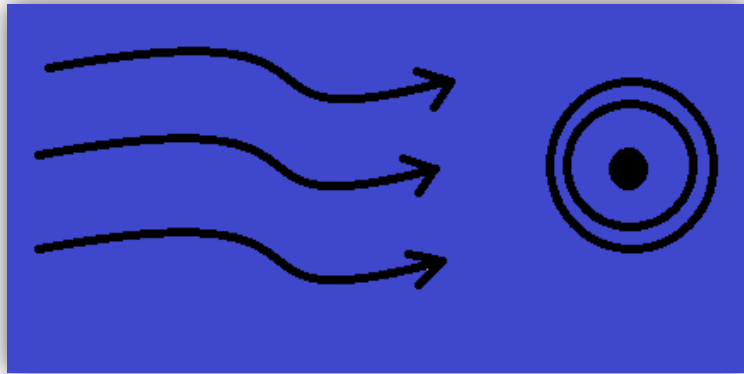


Экспериментальное доказательство существования шума

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_k \vec{\mathcal{E}}_k e^{i\omega t} d^3k + \text{к. с.}$$

3. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference, C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 – Published 2 November 1987

Атом со сложной структурой энергетических уровней находится во внешнем электромагнитном поле с неклассическими свойствами.



1. Описание поля:

$E(t)$ – решение уравнения Максвелла,
корреляционные функции

2. Описание атома:

Для атома - уравнение Шредингера

$$\Psi(x, y, z, t), E(x, y, z, t)$$

Уравнение Шредингера в форме Блоха

$$\begin{cases} \dot{u} = -(\omega_0 - \omega)v \\ \dot{v} = (\omega_0 - \omega)u + \chi E w, \text{ или иначе} \\ \dot{w} = -\chi E v \end{cases} \quad \frac{d}{dt} Y = AY, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & -(\omega_0 - \omega) & 0 \\ \omega_0 - \omega & 0 & \chi E \\ 0 & -\chi E & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

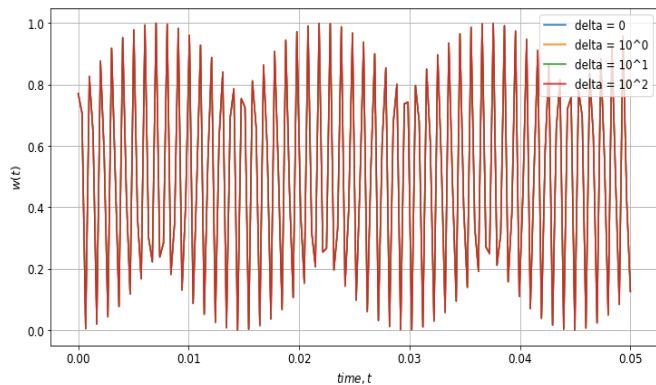
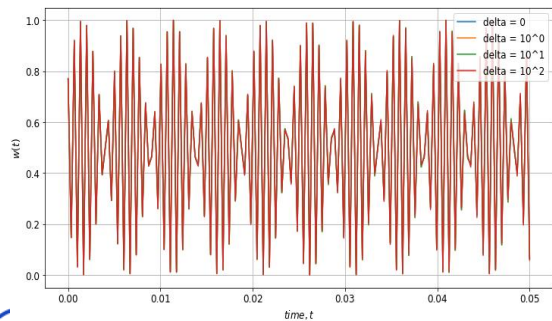
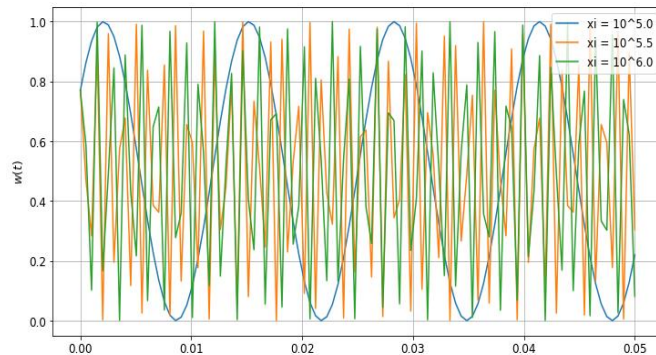
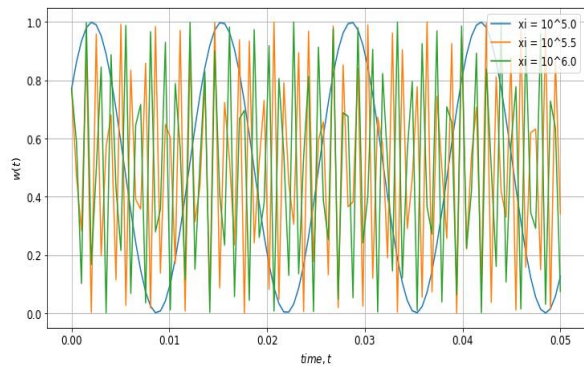
Решение данной системы

$$\begin{cases} u(t) = -\frac{\delta C_1}{\sqrt{\delta^2 + \chi^2}} \sin(\sqrt{\delta^2 + \chi^2} t) - \frac{\delta C_2}{\sqrt{\delta^2 + \chi^2}} [\cos(\sqrt{\delta^2 + \chi^2} t) - 1] + u(0) \\ v(t) = C_1 \cos(\sqrt{\delta^2 + \chi^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\delta^2 + \chi^2} t) \\ w(t) = -\frac{\chi C_1}{\sqrt{\delta^2 + \chi^2}} \sin(\sqrt{\delta^2 + \chi^2} t) - \frac{\chi C_2}{\sqrt{\delta^2 + \chi^2}} [\cos(\sqrt{\delta^2 + \chi^2} t) - 1] + w(0) \end{cases}$$

При начальных условиях $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} |_{t=0}$ колебания атома от внешнего уровня к внутреннему описываются как

$$w(t) = \frac{\chi^2}{\delta^2 + \chi^2} [\cos(\sqrt{\delta^2 + \chi^2} t) - 1] + 1$$

Графики

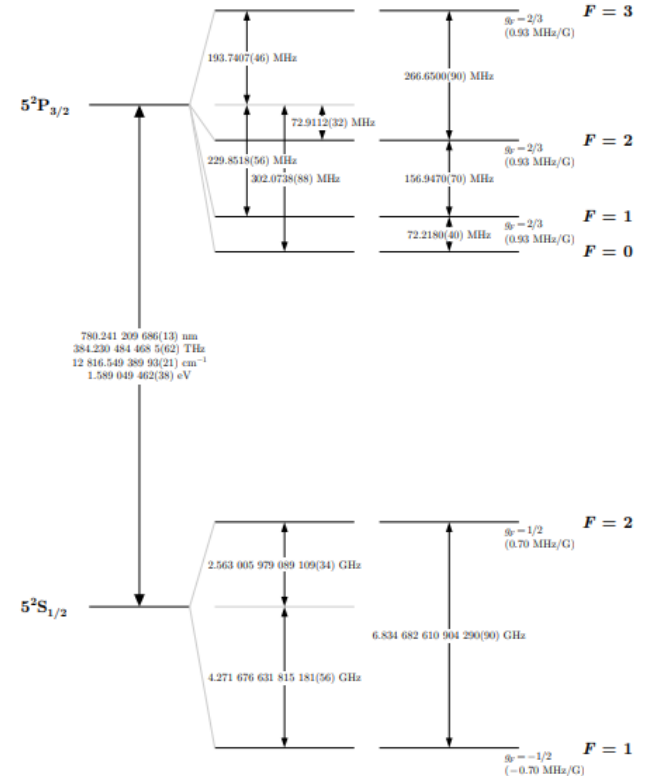


Переход от энергетического представления к координатному

$$\Psi(x, y, z, t) = C_a(t)\Psi_a(x, y, z)e^{-i\omega_a t} + C_b(t)\Psi_b(x, y, z)e^{-i\omega_b t}$$

Коэффициенты C_a , C_b содержат в себе шум, который появился от действия электромагнитного поля.

В дальнейшем планируется расширить модель на многоуровневый – Ru – у него 16 уровней.



Приближение вращающейся волны

Запишем уравнение Шредингера для двухуровневого атома:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \text{ где } H = H_0 + V$$

$|\Psi\rangle = C_a|a\rangle + C_b|b\rangle$, где a, b – энергетические уровни.

$$i\hbar(C_a \dot{|a}\rangle + C_b \dot{|b}\rangle) = C_a E_a |a\rangle + C_b E_b |b\rangle - (\bar{d}, \bar{E})(C_a |a\rangle + C_b |b\rangle) \Leftrightarrow \begin{cases} i\hbar \dot{C}_a = C_a E_a - (\langle a | \bar{d} | b \rangle \cdot \bar{E}) C_b \\ i\hbar \dot{C}_b = C_b E_b - (\langle b | \bar{d} | a \rangle \cdot \bar{E}) C_a \end{cases}$$

где $\langle a | \bar{d} | b \rangle = \overline{d_{ab}}$, $\langle b | \bar{d} | a \rangle = \overline{d_{ab}^*}$.

Приближение вращающейся волны

Приближение вращающейся волны состоит в том, чтобы в качестве решения подставить $C_a = e^{\frac{E_a}{i\hbar}t} f_a(t)$,

$C_b = e^{\frac{E_b}{i\hbar}t} f_b(t)$, тогда после интегрирования по периоду $\frac{2\pi}{\omega_0 + \omega}$ получим

$$\begin{cases} \dot{\tilde{f}}_a = \tilde{f}_b (\overline{d_{ab}} \cdot \overline{\xi_0}) \frac{i}{\hbar} - \frac{i(\omega_0 - \omega)}{2} \tilde{f}_a \\ \dot{\tilde{f}}_b = \tilde{f}_a (\overline{d_{ab}^*} \cdot \overline{\xi_0}) \frac{i}{\hbar} + \frac{i(\omega_0 - \omega)}{2} \tilde{f}_b \end{cases}, \text{ где } f_a(t) = e^{\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2}} \tilde{f}_a(t), f_b(t) = e^{-\frac{i(\omega_0 - \omega)t}{2}} \tilde{f}_b(t).$$

Решение данной системы:
$$\begin{cases} C_a(t) = e^{\frac{i\delta + E_a}{2 + i\hbar}t} \left(\frac{C_1 \sqrt{\delta^2 + 4\chi^2} \cos\left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\chi^2}\right) - i(\delta C_1 - 2\chi C_2) \sin\left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\chi^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + 4\chi^2}} \right) \\ C_b(t) = e^{\left(\frac{E_b}{i\hbar} - \frac{i\delta}{2}\right)t} \left(\frac{C_2 \sqrt{\delta^2 + 4\chi^2} \cos\left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\chi^2}\right) + i(\delta C_1 + 2\chi C_2) \sin\left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\chi^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + 4\chi^2}} \right) \end{cases}, \text{ где } \delta = (\omega_0 - \omega), \chi =$$

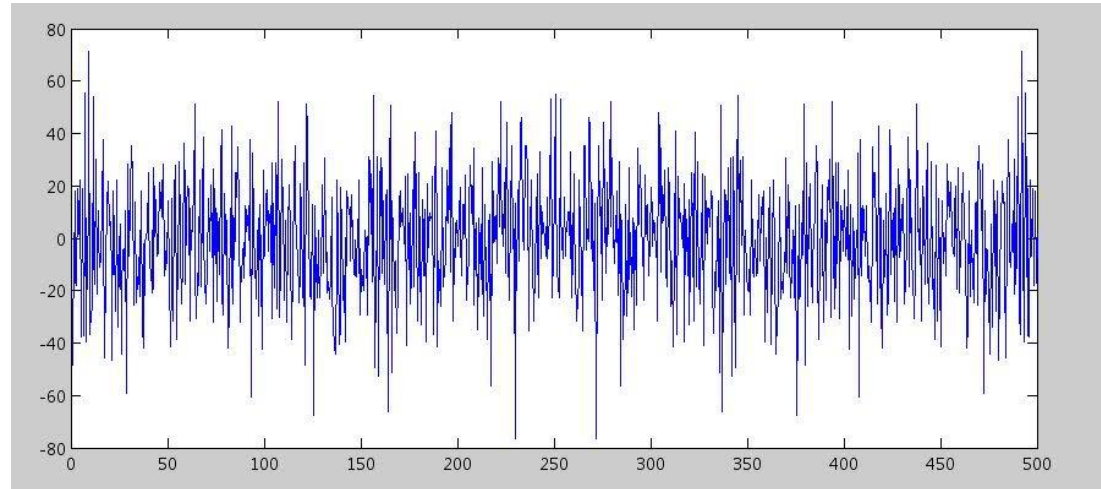
$$(\overline{d_{ab}^*} \cdot \overline{\xi_0}) \frac{1}{\hbar}.$$

Перспективы

Пронаблюдать рассеивание флуктуаций поля

$\chi_i = \chi_0 + n_i$, где n_i - шум.

$n_i = \sum_S (A_S \sin \omega_i t)$



Спасибо за внимание!

IT'sMO *re than a*
UNIVERSITY